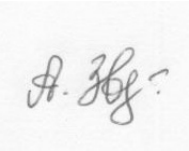
На правах рукописи



Звягин Андрей Викторович

ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ДВИЖЕНИЯ РАСТВОРОВ ПОЛИМЕРОВ С СУБСТАЦИОНАЛЬНОЙ И ОБЪЕКТИВНОЙ ПРОИЗВОДНЫМИ

01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Воронеж – 2014

Работа выполнена в Воронежском государственном университете.

Научный руководитель: доктор физико–математических наук, профессор Орлов Владимир Петрович.

Официальные оппоненты: Денисов Александр Михайлович, доктор физико–математических наук, профессор, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, кафедра математической физики, заведующий.

Копачевский Николай Дмитриевич, доктор физико–математических наук, профессор, Таврический национальный университет имени В. И. Вернадского, кафедра математического анализа, заведующий.

Ведущая организация: Российский университет дружбы народов.

Защита состоится 23 декабря 2014 года в 16 часов 30 минут на заседании диссертационного совета Д 212.038.22 при Воронежском государственном университете по адресу: 394006, Воронеж, Университетская пл., 1, ауд. 335. С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Воронежского государственного университета, а также на сайте http://www.science.vsu.ru/disserinfo&cand=2674

Автореферат разослан ” ” октября 2014 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Гликлих Юрий Евгеньевич

Общая характеристика работы

Актуальность работы.

Гидродинамика издавна была источником постановки серьезных математических задач, при решении которых как создавались новые, так совершенствовались и старые, классические математические методы. При этом основным объектом исследования для математиков являлись, как правило, краевые и начально–краевые задачи для системы уравнений Навье–Стокса. Но в последние годы внимание математиков обращено на то, что многие реальные среды, такие как битумы, полимеры, различные полимерные растворы и расплавы, эмульсии и суспензии, кровь и многие другие не описываются моделями классической (ньютоновской) гидродинамики, хотя они по многим признакам близки к жидкостям. Такие объекты получили название «неньютоновские жидкости».

В настоящее время уже имеется большое число моделей, описывающих разные классы таких сред. К несомненным достоинствам данных моделей следует отнести тот факт, что они учитывают предысторию течения жидкости, что позволяет им быть более точными, по сравнению с моделями классической гидродинамики. Отметим, что такими математическими моделями занималось большое число известных ученых: Дж.Г. Олдройт, К. Трусделл, C. Guillope, J.–C. Sant, J.–L. Lions, А.П. Осколков, В.А. Павловский, G.P. Galdi, E.S. Titi, J. Malek, В.Г. Литвинов, П.Е. Соболевский и др. Тема данной диссертации как раз посвящена исследованию математических проблем для моделей, описывающих движение растворов полимеров.

Таким образом, тема диссертации является вполне актуальной.

Цель работы.

1) Исследовать существование слабых решений краевой задачи, описывающей движение растворов полимеров. 2) Исследовать существование оп-

тимального управления с обратной связью для краевой задачи, описывающей движение растворов полимеров, дающего минимум заданному ограниченному, полунеперывному снизу функционалу качества. 3) Исследовать существование слабых решений начально–краевой задачи, описывающей движение растворов полимеров, с реологическим соотношением, удовлетворяющим принципу объективности. 4) Исследовать существование оптимального управления с обратной связью для начально–краевой задачи, описывающей движение растворов, с реологическим соотношением, удовлетворяющим принципу объективности, дающего минимум заданному ограниченному, полунеперывному снизу функционалу качества. 5) Исследовать существование минимального траекторного и глобального аттракторов для математической модели, описывающей движение растворов полимеров, с реологическим соотношением, удовлетворяющим принципу объективности.

Методы исследования.

Для исследования поставленных задач о разрешимости и существовании аттракторов использовался аппроксимационно–топологический метод изучения задач гидродинамики (его изложение см., например, в монографии V.G. Zvyagin, D.A. Vorotnikov Topological Approximation Methods for Evolutionary Problems of Nonlinear Hydrodynamics // Walter de Gruyter. Berlin-New York. 2008. 230 p.). Этот метод основан на аппроксимации исходной (стационарной или эволюционной) задачи в каком–то смысле более простыми задачами с более хорошими свойствами, исследовании их разрешимости в более гладких пространствах с использованием теории топологической степени отображений бесконечномерных пространств и последующем предельном переходе.

Научная новизна.

Основные результаты диссертационной работы являются новыми. Из

них выделим следующие: 1) Доказана теорема о существование слабых решений краевой задачи, описывающей движение растворов полимеров (с полной и с объективной производными в реологическом соотношении) как в ограниченной области, так и произвольной области пространства R^n, $n = 2, 3$. 2) Доказана теорема о существование оптимального управления с обратной связью для краевой задачи, описывающей движение растворов полимеров (с полной и с объективной производными в реологическом соотношении), дающего минимум заданному ограниченному, полунеперывному снизу функционалу качества. 3) Доказана теорема о существование слабых решений начально–краевой задачи, описывающей движение растворов полимеров, с реологическим соотношением, удовлетворяющим принципу объективности. 4) Доказана теорема о существование оптимального управления с обратной связью для начально–краевой задачи, описывающей движение растворов, с реологическим соотношением, удовлетворяющим принципу объективности, дающего минимум заданному ограниченному, полунеперывному снизу функционалу качества. 5)Доказана теорема о существование минимального траекторного и глобального аттракторов для математической модели, описывающей движение растворов полимеров, с реологическим соотношением, удовлетворяющим принципу объективности.

Практическая и теоретическая значимость.

Работа носит теоретический характер. Надо заметить, что реологическое соотношение для модели движения полимеров с реологическим соотношением, удовлетворяющим принципу объективности, является частным случаем реологического соотношения для жидкостей второго порядка. Однако, для моделей движения жидкостей второго порядка не получено никаких серьезных нелокальных результатов (кроме теорем при малых данных, локальных теорем и определенных результатов для стационарных случа-

ев), результаты исследования данной модели движения полимеров являются серьезным новым шагом в этой области и могут быть развиты в других задачах.

Апробация работы.

Результаты диссертации докладывались на международных математических школах: «Mathematical models in the manufacturing of glass, polymers and textiles» (Монтекатими Терме, Италия 2008), «20ая Крымская Осенняя Математическая Школа–Симпозиум» (Ласпи–Батилиман, Украина 2009), «Multiscale and adaptivity: modeling, numerics and applications» (Четраро, Италия 2009), «Mathematical fluid dynamics» (Левико Терме, Италия 2012), «Vector–valued partial differential equations and applications» (Четраро, Италия 2013); на международных конференциях: «Геометрия Банаховых Пространств» (Санкт-Петербург, Россия 2010), «Теория функций, ее приложения и смежные вопросы» (Казань, Россия 2011), «Дифференциальные и функционально–дифференциальные уравнения» (Москва, Россия 2011, 2014), «Analysis, topology and applications» (Харбин, Китай 2011), «Крымская международная математическая конференция (КММК-2013)» (Судак, Украина 2013), «10th Euromech Fluid Mechanics Conference» (Копенгаген, Дания 2014); на международных конгрессах: «6th European Congress of Mathematics» (Краков, Польша 2012), «International Congress of Mathematicians» (Сеул, Корея 2014); на семинарах НИИ математики (ВГУ, 2012–2014); на семинаре под руководством профессора А. Г. Баскакова (ВГУ, 2011); на научных сессиях ВГУ (2011–2014).

Публикации.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1-10]. Работы [1-7],[9-10] опубликованы в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ.

Структура и объем диссертации.

Диссертация состоит из введения, трех глав, разделенных на параграфы, и библиографии, содержащей 39 наименований. Общий объем диссертации - 139 страниц.

Содержание диссертации

В первой главе диссертации исследуется слабая разрешимость краевой задачи, описывающей стационарное движение слабо концентрированных водных растворов полимеров, с полной производной в реологическом соотношении, как в ограниченной области $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, так и в произвольной области $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$. То есть, пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$,. Рассматривается следующая краевая задача:

$$\sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \nu \Delta v - 2\varkappa \mathrm{Div}\left(\sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial \mathcal{E}(v)}{\partial x_i}\right) + \mathrm{grad}\, p = f, \quad x \in \Omega; \quad (1.1.1)$$

$$\mathrm{div}\, v = 0, \quad x \in \Omega; \qquad v|_{\partial\Omega} = 0. \qquad (1.1.2)$$

Для определения слабого решения вводятся следующие пространства: $\mathfrak{D}(\Omega)^n$ – пространство функций на Ω со значениями в $\mathbb{R}^n$ класса C^∞ с компактным носителем, содержащимся в Ω; $\mathcal{V} = \{v : v \in \mathfrak{D}(\Omega)^n, \mathrm{div}\, v = 0\}$ – подмножество соленоидальных функций пространства $\mathfrak{D}(\Omega)^n$; V – замыкание $\mathcal{V}$ по норме пространства $W_2^1(\Omega)^n$; X – замыкание $\mathcal{V}$ по норме пространства $W_2^3(\Omega)^n$.

Определение 1.1.2 *Пусть $f \in V^*$. Слабым решением краевой задачи (1.1.1)–(1.1.2) называется функция $v \in V$, удовлетворяющая для любого $\varphi \in \mathcal{V}$ равенству:*

$$\nu \int_\Omega \nabla v : \nabla \varphi \, dx - \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \, dx -$$

$$-\varkappa \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^{n} v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\, dx - \varkappa \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^{n} v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\, dx = \langle f, \varphi \rangle. \quad (1.1.20)$$

Первым основным результатом первой главы является теорема:

Теорема 1.1.5 *Пусть Ω произвольная область пространства $\mathbb{R}^n$ и $n = 2, 3$. Тогда для любого $f \in V^*$ краевая задача (1.1.1)–(1.1.2) имеет хотя бы одно слабое решение $v_* \in V$.*

Также в первой главе исследуется существование оптимального управления с обратной связью для краевой задачи, описывающей стационарное движение растворов полимеров, с полной производной в реологическом соотношении, дающего минимум заданному ограниченному, полунеперывному снизу функционалу качества.

Рассматривается многозначное отображение $\Psi : \ V \multimap V^*$ в качестве функции управления. Предполагается, что отображение Ψ удовлетворяет следующим условиям: i_1) отображение Ψ определено на пространстве V и имеет непустые, компактные, выпуклые значения; i_2) отображение Ψ полунепрерывно сверху и компактно; i_3) отображение Ψ глобально ограничено; i_4) отображение Ψ слабо замкнуто.

Под обратной связью понимается условие

$$f \in \Psi(v), \quad (1.2.1)$$

где v – решение исследуемой задачи.

Определение 1.2.1 *Пара функций $(v, f) \in V \times V^*$ называется слабым решением задачи оптимального управления с обратной связью (1.1.1)–(1.1.2), (1.2.1), если она для любого $\varphi \in X$ удовлетворяет равенству (1.1.20).*

Обозначим через $\Sigma \subset V \times V^*$ множество всех слабых решений задачи (1.1.1)–(1.1.2), (1.2.1). Рассмотрим произвольный функционал стоимости

$\Phi: \ \Sigma \to \mathbb{R}$, удовлетворяющий следующим условиям: j_1) существует число γ такое, что $\Phi(v,f) \geqslant \gamma$ для всех $(v,f) \in \Sigma$; j_2) если $v_m \rightharpoonup v_*$ в V и $f_m \to f_*$ в V^*, то $\Phi(v_*, f_*) \leqslant \varliminf\limits_{m\to\infty} \Phi(v_m, f_m)$.

Вторым основным результатом первой главы является теорема:

Теорема 1.2.3 *Если отображение Ψ удовлетворяет условиям i_1)–i_4), а функционал Φ – условиям j_1), j_2), то задача (1.1.1)–(1.1.2), (1.2.1) имеет хотя бы одно слабое решение (v_*, f_*) такое, что $\Phi(v_*, f_*) = \inf\limits_{(v,f)\in\Sigma} \Phi(v,f)$.*

Также в первой главе диссертации исследуется слабая разрешимость краевой задачи, описывающей стационарное движение слабо концентрированных водных растворов полимеров, с объективной производной в реологическом соотношении, как в ограниченной области $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $n = 2,3$, так и в произвольной области $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $n = 2,3$, и исследуется существование оптимального управления с обратной связью для данной задачи, дающего минимум заданному ограниченному, полунеперывному снизу функционалу качества.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2,3$. Рассматривается следующая краевая задача:

$$\sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \nu\Delta v - 2\varkappa \mathrm{Div}\Big(\sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial \mathcal{E}(v)}{\partial x_i}\Big) -$$

$$-2\varkappa \mathrm{Div}\Big(\mathcal{E}(v)W_\rho(v) - W_\rho(v)\mathcal{E}(v)\Big) + \mathrm{grad}\ p = f, \quad x \in \Omega; \tag{1.3.1}$$

$$\mathrm{div}\ v = 0, \quad x \in \Omega; \quad v|_{\partial\Omega} = 0, \tag{1.3.2}$$

где $W_\rho(v) = \int_{\mathbb{R}^n} \rho(x-y)W(t,y)\,dy$, $\rho : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – гладкая функция с компактным носителем, такая что $\int_{\mathbb{R}^n} \rho(y)\,dy = 1$ и $\rho(x) = \rho(y)$ для x и y с одинаковыми евклидовыми нормами; $W(v) = (W_{ij}(v))$, $W_{ij}(v) = \dfrac{1}{2}(\dfrac{\partial v_i}{\partial x_j} - \dfrac{\partial v_j}{\partial x_i})$ – тензор завихренности.

Определение 1.3.1 *Пусть $f \in V^*$. Слабым решением краевой задачи (1.3.1)–(1.3.2) называется функция $v \in V$, удовлетворяющая для любого*

$\varphi \in \mathcal{V}$ *равенству:*

$$\nu \int\limits_{\Omega} \nabla v : \nabla \varphi \, dx - \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \, dx -$$

$$-\varkappa \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^{n} v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} \, dx - \varkappa \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^{n} v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx +$$

$$+2\varkappa \int\limits_{\Omega} (\mathcal{E}(v) W_\rho(v) - W_\rho(v) \mathcal{E}(v)) : \nabla \varphi dx = \langle f, \varphi \rangle. \qquad (1.3.3)$$

Третьим основным результатом первой главы является теорема:

Теорема 1.3.4 *Пусть* Ω *произвольная область пространства* $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$. *Тогда для любого* $f \in V^*$ *краевая задача (1.3.1)–(1.3.2) имеет хотя бы одно слабое решение* $v_* \in V$.

Определение 1.4.1 *Пара функций* $(v, f) \in V \times V^*$ *называется слабым решением задачи оптимального управления с обратной связью (1.3.1)–(1.3.2), (1.2.1), если она для любого* $\varphi \in X$ *удовлетворяет равенству (1.3.3).*

Обозначим через $\Sigma \subset V \times V^*$ множество всех слабых решений задачи (1.3.1)–(1.3.2), (1.2.1). Рассмотрим произвольный функционал стоимости $\Phi : \Sigma \to \mathbb{R}$, удовлетворяющий условиям j_1)–j_2).

Четвертым основным результатом первой главы является теорема:

Теорема 1.4.2 *Если отображение* Ψ *удовлетворяет условиям* i_1)–i_4), *а функционал* Φ *– условиям* j_1), j_2), *то задача (1.3.1)–(1.3.2), (1.2.1) имеет хотя бы одно слабое решение* (v_*, f_*) *такое, что* $\Phi(v_*, f_*) = \inf\limits_{(v,f) \in \Sigma} \Phi(v, f)$.

Во второй главе диссертации исследуется существование слабых решений начально–краевой задачи, описывающей движение растворов полимеров, с реологическим соотношением, удовлетворяющим принципу объективности.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^2. Рассматривается следующая начально–краевая задача:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \nu\Delta v - \varkappa\frac{\partial \Delta v}{\partial t} - 2\varkappa \mathrm{Div}\left(\sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial \mathcal{E}(v)}{\partial x_i}\right) -$$

$$-2\varkappa \mathrm{Div}\left(\mathcal{E}(v)W_\rho(v) - W_\rho(v)\mathcal{E}(v)\right) + \mathrm{grad}\ p = f, \quad (t,x) \in (0,T)\times\Omega; \quad (2.1.1)$$

$$\mathrm{div}\ v = 0, \quad (t,x) \in (0,T)\times\Omega; \quad (2.1.2)$$

$$v(x,0) = v_0(x), \quad x \in \Omega; \quad v|_{\partial\Omega\times[0,T]} = 0. \quad (2.1.3)$$

Для определения слабого решения нам потребуется шкала пространств V^α, $\alpha > 0$, порожденная оператором Стокса (заметим, что при $\alpha = 1$ пространство V^1 совпадает с пространством V). Рассматривается пространство $E_1 = \{v : v \in L_\infty(0,T;V^1),\ v' \in L_2(0,T;V^{-1})\}$, с нормой: $\|v\|_{E_1} = \|v\|_{L_\infty(0,T;V^1)} + \|v'\|_{L_2(0,T;V^{-1})}$. Будем предполагать, что $f \in L_2(0,T;V^{-1})$, $v_0 \in V^1$.

Определение 2.1.1 *Слабым решением начально–краевой задачи (2.1.1)–(2.1.3) называется функция $v \in E_1$, удовлетворяющая начальному условию $v(0) = v_0$ и для любого $\varphi \in V^3$ и почти всех $t \in (0,T)$ равенству*

$$\frac{d}{dt}\int_0^T\int_\Omega v\varphi\,dx\,dt - \int_0^T\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\,dx\,dt +$$

$$+\nu\int_0^T\int_\Omega \nabla v : \nabla\varphi\,dx\,dt + \varkappa\frac{d}{dt}\int_0^T\int_\Omega \nabla v : \nabla\varphi\,dx\,dt -$$

$$-\varkappa\int_0^T\int_\Omega \sum_{i,j,k=1}^{n} v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\,dx\,dt - \varkappa\int_0^T\int_\Omega \sum_{i,j,k=1}^{n} v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\,dx\,dt +$$

$$+2\varkappa\int_0^T\int_\Omega \left(\mathcal{E}(v)W_\rho(v) - W_\rho(v)\mathcal{E}(v)\right) : \nabla\varphi\,dx\,dt = \int_0^T \langle f, \varphi\rangle\,dt. \quad (2.1.5)$$

Первым основным результатом второй главы является теорема:

Теорема 2.1.1 *Для любых $f \in L_2(0,T;V^{-1})$, $v_0 \in V^1$ начально–краевая задача (2.1.1)–(2.1.3) имеет хотя бы одно слабое решение $v_* \in E_1$.*

Также во второй главе исследуется существование оптимального управления с обратной связью для начально–краевой задачи, описывающей движение растворов полимеров, с объективной производной в реологическом соотношении, дающего минимум заданному ограниченному, полунеперывному снизу функционалу качества.

Аналогично оптимальному управлению для краевых задач рассмотрим многозначное отображение $\Psi : E_1 \multimap L_2(0,T;V^{-1})$ в качестве функции управления (только действующее в других пространствах). Будем предполагать, что Ψ удовлетворяет следующим условиям: (Ψ1) отображение Ψ определено на пространстве E_1 и имеет непустые, компактные, выпуклые значения; (Ψ2) отображение Ψ полунепрерывно сверху и компактно; (Ψ3) отображение Ψ глобально ограничено; (Ψ4) Ψ слабо замкнуто.

Под обратной связью понимается условие (1.2.1) при Ψ, удовлетворяющем условиям (Ψ1)-(Ψ4).

Определение 2.2.1 *Пара функций $(v,f) \in E_1 \times L_2(0,T;V^{-1})$ называется слабым решением задачи оптимального управления с обратной связью (2.1.1)–(2.1.3), (1.2.1), если она удовлетворяет начальному условию $v(0) = v_0$ и для любого $\varphi \in V^3$ и почти всех $t \in (0,T)$ условию обратной связи (1.2.1), и тождеству (2.1.5).*

Обозначим через $\Sigma \subset E_1 \times L_2(0,T;V^{-1})$ множество всех слабых решений задачи (2.1.1)–(2.1.3), (1.2.1). Рассмотрим произвольный функционал качества $\Phi : \Sigma \to \mathbb{R}$, удовлетворяющий следующим условиям: (Φ1) существует число γ такое, что $\Phi(v,f) \geqslant \gamma$ для всех $(v,f) \in \Sigma$. (Φ2) если $v_m \rightharpoonup v_*$ в E_1 и $f_m \to f_*$ в $L_2(0,T;V^{-1})$, то $\Phi(v_*,f_*) \leqslant \varliminf\limits_{m\to\infty} \Phi(v_m,f_m)$.

Вторым основным результатом второй главы является теорема:

Теорема 2.2.2 *Если отображение* Ψ *удовлетворяет условиям* $(\Psi 1)-(\Psi 4)$, *а функционал* Φ *удовлетворяет условиям* $(\Phi 1)-(\Phi 2)$, *тогда задача (2.1.1)–(2.1.3), (1.2.1) имеет хотя бы одно слабое решение* (v_*, f_*) *такое, что* $\Phi(v_*, f_*) = \inf\limits_{(v,f)\in\Sigma} \Phi(v, f)$.

В третьей главе диссертации исследуется существование минимального траекторного и глобального аттракторов для математической модели, описывающей движение растворов полимеров, с реологическим соотношением, удовлетворяющим принципу объективности.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ограниченная область с гладкой границей, $n = 2, 3$. Рассматривается следующая начально-краевая задача

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \nu\,\Delta\, v - \varkappa \frac{\partial\,\Delta\, v}{\partial t} - 2\varkappa \mathrm{Div}\,(\sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial \mathcal{E}(v)}{\partial x_i}) + \mathrm{grad}\ p-$$

$$-2\varkappa \mathrm{Div}\,\big(\mathcal{E}(v)W_\rho(v) - W_\rho(v)\mathcal{E}(v)\big) = f, \quad (x,t) \in \Omega \times (0, +\infty), \tag{3.1.1}$$

$$\mathrm{div}\, v = 0 \quad (x,t) \in \Omega \times (0, +\infty), \tag{3.1.2}$$

$$v|_{\partial\Omega} = 0 \quad t \in (0, +\infty), \tag{3.1.3}$$

$$v|_{t=0} = a \quad x \in \Omega. \tag{3.1.4}$$

Введем следующее пространство: $W_1[0,T] = \{v\colon v \in L_\infty(0,T;V^1),\ v' \in L_\infty(0,T;V^{-1})\}$ с нормой $\|v\|_{W_1[0,T]} = \|v\|_{L_\infty(0,T;V^1)} + \|v'\|_{L_\infty(0,T;V^{-1})}$. Для определения слабого решения на полуоси $\mathbb{R}_+$ рассматривается пространство $W_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$, состоящее из функций v, определённых почти всюду на $\mathbb{R}_+$ и принимающих значения в V^1, таких что ограничение v на любой отрезок $[0,T]$ принадлежит $W_1[0,T]$.

Определение 3.1.4 *Слабым решением задачи (3.1.1)–(3.1.4) на отрезке* $[0,T]$ *с начальным условием* $a \in V^1$ *будем называть функцию*

$v \in W_1[0,T]$, которая удовлетворяет начальному условию $v(0) = a$ и почти всюду на $(0,T)$ для любой функции $\varphi \in V^3$ тождеству

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega} v(t)\varphi\,dx + \varkappa\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega} \nabla v(t) : \nabla\varphi\,dx +$$

$$+\nu\int\limits_{\Omega} \nabla v(t) : \nabla\varphi\,dx - \sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega} v_i(t)v_j(t)\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}dx -$$

$$-\varkappa\sum_{i,j,k=1}^{n}\int\limits_{\Omega} v_k(t)\frac{\partial v_i}{\partial x_j}(t)\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x_i\partial x_k}dx - \varkappa\sum_{i,j,k=1}^{n}\int_{\Omega} v_k(t)\frac{\partial v_j}{\partial x_i}(t)\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x_i\partial x_k}dx +$$

$$+2\varkappa\int\limits_{\Omega}(\mathcal{E}(v)W_\rho(v) - W_\rho(v)\mathcal{E}(v)) : \nabla\varphi\,dx = \int\limits_{\Omega} f\varphi\,dx.$$

Определение 3.1.5 *Слабым решением задачи (3.1.1)–(3.1.4) на полуоси $\mathbb{R}_+$ будем называть функцию $v \in W_1^{loc}(\mathbb{R}_+)$, такую, что при каждом $T > 0$ ограничение v на отрезок $[0,T]$ является слабым решением этой задачи на данном отрезке.*

Определение 3.1.6 *Функцию $v \in W_1^{loc}(\mathbb{R}_+) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$ будем называть траекторией задачи (3.1.1)–(3.1.4), если она является решением этой задачи с некоторым начальным условием $a \in V^1$ и удовлетворяет оценке*

$$\|v(t)\|_1 + \|v'(t)\|_{-1} \leqslant R_0\left(1 + \|v\|^2_{L_\infty(\mathbb{R}_+,V^1)}e^{-\alpha t}\right) \quad \text{п. в. } t \geqslant 0.$$

Множество траекторий данной задачи будем называть её пространством траекторий и обозначать $\mathcal{H}^+$.

Зададим число $0 < \delta < 1$.

Основными результатами третьей главы являются следующие теоремы:

Теорема 3.1.6 *Пусть $f \in L_2(\Omega)^n$. Тогда существует минимальный траекторный аттрактор $\mathcal{U}$ пространства траекторий $\mathcal{H}^+$. Аттрактор*

ограничен в $L_\infty(\mathbb{R}_+; V^1)$*, компактен в* $C(\mathbb{R}_+; V^{1-\delta})$*; он притягивает в топологии пространства* $C(\mathbb{R}_+; V^{1-\delta})$ *семейства траекторий, ограниченные в* $L_\infty(\mathbb{R}_+; V^1)$*.*

Теорема 3.1.7 *Существует глобальный аттрактор* $\mathcal{A}$ *пространства траекторий* $\mathcal{H}^+$*. Аттрактор ограничен в* V^1*, компактен в* $V^{1-\delta}$*; он притягивает в топологии пространства* $V^{1-\delta}$ *семейства траекторий, ограниченные в* $L_\infty(\mathbb{R}_+; V^1)$*.*

Список публикаций по теме диссертации

[1] Звягин А. В. О разрешимости стационарной модели движения слабых водных растворов полимеров / А. В. Звягин // Известия вузов. Математика. – 2011. – № 2. – С. 103–105.

[2] Звягин А. В. Исследование разрешимости стационарной модели движения слабых водных растворов полимеров / А. В. Звягин // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. – 2011. – № 1. – С. 147–156.

[3] Звягин А. В. Исследование разрешимости одной стационарной модели движения неньютоновой жидкости в неограниченной области / А. В. Звягин // Вестник ВГУ. Серия: Физика, Математика. – 2012. – № 2. – С. 118–121.

[4] Звягин А. В. Задача оптимального управления для стационарной модели слабо концентрированных водных растворов полимеров / А. В. Звягин // Дифференциальные уравнения. – 2013. – Т. 49, № 2. – С. 245–249.

[5] Zvyagin A. V. Optimal feedback control in the stationary mathematical model of low concentrated aqueous polymer solutions / A. V. Zvyagin // Applicable Analysis. – 2013. – V. 92, № 6. – P. 1157–1168.

[6] Звягин А. В. Задача оптимального управления с обратной связью для математической модели движения слабо концентрированных водных полимерных растворов с объективной производной / А. В. Звягин // Сибирский математический журнал. – 2013. – Т. 54, № 4. – С. 807–825.

[7] Zvyagin A. V. Solvability for equations of motion of weak aqueous polymer solutions with objective derivative / A. V. Zvyagin // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications. – 2013. – V. 90. – P. 70–85.

[8] Звягин А. В. Оптимальное управление с обратной связью для одной стационарной модели движения жидкости с объективной производной / А. В. Звягин // Spectral and Evolution Problems. – 2013. – Т. 23. – С. 91–102.

[9] Звягин А. В. Аттракторы для модели движения полимеров с объективной производной в реологическом соотношении / А. В. Звягин // Доклады Академии Наук. – 2013. – Т. 453, № 6. – С. 599–602.

[10] Zvyagin A. V. Solvability of the stationary mathematical model of one non-Newtonian fluid motion with the objective derivative / A. V. Zvyagin // Fixed point theory. An International Journal on Fixed Point Theory, Computation and Applications. – 2014. – V. 15, № 2. – P. 623–634.

Работы [1-7], [9-10] опубликованы в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ.